Continuite

Mehdi Khairy

2019-01-16

Contents

1 Definition

Une fonction f est continue en un point a si:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$$

On peut trouver $x \in \mathbb{R}, x0$ tel que:

$$\exists \eta, |x - a| \leqslant \eta, |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$$

2 Rappel

$c(t)$ représente un signal continu complexe dépendant du temps. Celui-ci peut-être représenté par deux signaux réels, $r(t)$ et $b(t)$ respectant la relation suivante:

$$\forall t \in \mathbb{R}, c(t) = r(t) + jb(t)$$

Nous accepterons aussi la validité de la transformée de Fourier du signal complexe $c(t)$ exprimée:

$$\forall f \in \mathbb{R}, \mathbb{F}_c^{\pm\infty}(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} c(t)e^{-j2\pi ft}\, dt$$

3 Transformée de Fourier du signal Complexe

La transformée du signal complex peut-être séparée en deux intégrales disctinctes:

$$\forall f \in \mathbb{R}, \mathbb{F}_c^{\pm\infty}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(t)e^{-j2\pi ft}\ dt$$
$$\mathbb{F}_c^{\pm\infty}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (r(t) + jb(t))e^{-j2\pi ft}\ dt$$

En distribuant la multiplication on a:

$$\mathbb{F}_c^{\pm\infty}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (r(t) + jb(t))e^{-j2\pi ft}\ dt$$
$$\mathbb{F}_c^{\pm\infty}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt\ +\ \int_{-\infty}^{+\infty} jb(t)e^{-j2\pi ft}\ dt$$

4 Transformée de Fourier du signal réel

Il est possible de considerer un signal réel comme un signal complexe de partie imaginaire nulle $\forall r(t) \in \mathbb{R}$ et $\forall c(t) \in \mathbb{C}$, c(t)=a(t)+jb(t) on a :

$$r(t) = \Re(c(t)) = \frac{c(t) + c(t)^*}{2} = a(t) + j0 = a(t)$$

4.1 Passage complexe à réel

On a donc deux expressions différentes pour décrire la Transformée de Fourier du signal réel, l'une basée sur la distribution de la multiplication dans l'intégrale et l'autre basée sur l'application de l'operateur "Partie réelle RE()" à un complexe.

Distribution:

$$\mathbb{F}_r^{\pm\infty}(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt\ +\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} jb(t)e^{-j2\pi ft}\ dt$$
$$\mathbb{F}_r^{\pm\infty}(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt\ +\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} j0e^{-j2\pi ft}\ dt$$
$$\mathbb{F}_r^{\pm\infty}(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt$$

Partie réelle:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F}_r^{\pm\infty}(f) &= \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (c(t) + c(t)^*)e^{-j2\pi ft}\ dt}{2} \\
&= \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt\ +\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} jb(t)e^{-j2\pi ft}\ dt\ + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt\ -\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} jb(t)e^{-j2\pi ft}\ dt}{2} \\
&= \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt\ +\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt}{2} \\
&= \frac{2 * \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt}{2} \\
\mathbb{F}_r^{\pm\infty}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt
\end{aligned}
$$

Les deux versions donnant le même résultat on est rassuré :D

4.2 Limitation aux fréquences positives

Comme montré plus haut, on a $\mathbb{F}_r^{\pm\infty}(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt$, nous nous attacherons à montrer que cette expression nous permet de limiter la plage de fréquences prise en compte de $[0, +\infty]$ tel qu'apparaissant sur les équipements de mesures.

$$\mathbb{F}_r^{\pm\infty}(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt$$

$$\begin{aligned}\forall f \leqslant 0, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi(-1f)t}\ dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{j2\pi(f)t}\ dt\end{aligned}$$

Sachant que $e^{-j2\pi(f)t} = (e^{j2\pi(f)t})^*$ on en déduit donc que, $\forall f \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{F}_r^{\pm\infty}(f) = (\mathbb{F}_r^{\pm\infty}(f))^*$
Cette conclusion nous permet d'affirmer que l'information contenu dans la représentation en fréquence de $r(t), \forall f \in]-\infty, 0[$ est redondante est peut donc être ignorée sans perte ! On dit définit donc:

$$\mathbb{F}_r^{+\infty}(f) = \int\limits_{0}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft}\ dt$$

comme représentation nécessaire et suffisante en fréquence du signal réel $r(t)$. C'est à dire que l'on peut reconstruire $r(t)$ depuis $\mathbb{F}_r^{+\infty}(f)$ sans perte.

4.3 Transformation inverse

La transformée de fourier inverse se définie de la manière suivante:

$$\forall f \in \mathbb{R}, c(t) \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{F}_c^{\pm\infty}(f) e^{j2\pi ft} \, dt$$

Comme définit précédemment $c(t)$ est un signal complexe, nous nous attacherons donc à trouver le lien nous permettant d'exprimer la transformée de fourier inverse pour un signal réel.