BER, SNR, $\frac{Eb}{N0}$ et autres joyeusetés

Mehdi Khairy

2019-01-01

Contents

1 Introduction

Ce document à pour but de regrouper les informations nécessaires à la compréhension du calcul de BER d'une modulation numérique.

2 Définition

k : constante de Boltzmann 13.8064852 10^{-24}J/K

N0 : densité de bruit par Hz dans la bande en W/Hz

Eb : energie du signal par bit transmis en W

Db : débit binaire de l'information transmise en *bits*/s

Es : energie du signal par symbole transmis en W

Ds : débit symbole en *symbole*/s

3 Puissance du signal

3.1 Puissance d'un echantillon

Le signal modulé en bande de base peut-être représenté sous la forme d'un produit de convolution entre la séquence de symboles à envoyer et le filtre de mise en forme:

$$st(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{S}_k.h(n - k.Ne)$$

Un signal numérique peut etre considérer comme une suite de valeur representant des tensions (pour des courants il faudra adapter le facteur de correction), la puissance d'un tel signal peut donc être calculer avec la loi d'ohm $P = U.I = \frac{|U|^2}{R}$ avec $U = st(n) * \beta$ ou β est le facteur de multiplication de l'ADC. On défini donc la puissance du signal par:

$$P(n) = \frac{|st(n) * \beta|^2}{R} = |st(n)|^2 * \frac{|\beta|^2}{R}$$

On défini donc la constante $\alpha = \frac{|\beta|^2}{R}$

$$P(n) = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{S}_k.h(n - k.Ne) \right|^2 * \alpha$$

Avec pour chaque k, $\mathbb{S}_k$ une variable aléatoire complexe représentant les valeurs possibles de la suite de symboles. Ne le nombres d'échantillons séparant l'émission de deux symboles et $h(n)$ le filtre de mise en forme.

Les variables $\mathbb{S}_k$ sont décorrélées. On a donc $\mathbb{E}(\mathbb{S}_k.\mathbb{S}_j^*) = 0$. On peut donc calculer une espérance de la puissance du signal pour tous les échantillons:

$$\mathbb{E}(|st(n)|^2) = \mathbb{E}\left(\left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{S}_k.h(n - k.Ne) \right|^2 \right)$$

On peut simplifier le module au carré en le transformant en multiplication complexe, en effet: $|a|^2 = a.a^*$

$$\mathbb{E}(|st(n)|^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{S}_k.h(n - k.Ne) \right) . \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{S}_j.h(n - j.Ne) \right)^* \right)$$

Définissons $\mathbb{S}_{kn} = \mathbb{S}_k.h(n-k.Ne)$ et $\mathbb{S}^*_{jn} = \mathbb{S}^*_j.h(n-j.Ne)^*$. On peut développer l'équation précédente.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|st(n)|^2) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=j}(\mathbb{S}_{kn}.\mathbb{S}^*_{jn})\right) + \left(\sum_{k!=j}(\mathbb{S}_{kn}.\mathbb{S}^*_{jn})\right)\right) \\
&= \left(\sum_{k=j}\mathbb{E}(\mathbb{S}_{kn}.\mathbb{S}^*_{jn})\right) + \left(\sum_{k!=j}\mathbb{E}(\mathbb{S}_{kn}.\mathbb{S}^*_{jn})\right)
\end{aligned}$$

Le deuxième terme peut s'écrire $\sum_{k!=j}(\mathbb{E}(\mathbb{S}_{kn}.\mathbb{S}^*_{jn}).h(n-kNe).h(n-jNe)^*)$ le deuxième terme est donc nul.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|st(n)|^2) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\mathbb{E}(\mathbb{S}_k.\mathbb{S}^*_k).(h(n-kNe).h(n-kNe)^*)) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\mathbb{E}(|\mathbb{S}_k|^2).|h(n-kNe)|^2
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}(|\mathbb{S}_k|^2)$ ne dépend pas de k nous la renommons $\mathbb{S}^2$.

3.2 Puissance moyenne

Rappelons l'équation précédente:

$$\mathbb{E}(|st(n)|^2) = \mathbb{S}^2. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|h(n-kNe)|^2)$$

Définissons $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(|h(n-kNe)|^2)$. Pour calculer la puissance moyenne du signal il faut trouver une periode sur laquelle baser la moyenne. Si $f(n)$ est périodique de période Ne alors $f(n) = f(n+Ne)$

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|h(n-kNe)|^2) \\
f(n+Ne) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|h(n+Ne-kNe)|^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|h(n+(1-k)Ne)|^2) \\
&= \sum_{k=-\infty+1}^{+\infty+1} (|h(n-kNe)|^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|h(n-kNe)|^2) \\
f(n) &= f(n+Ne)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que Pst, la puissance moyenne du signal st est définie de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
Pst &= \frac{1}{Ne}. \sum_{n=0}^{Ne-1} \mathbb{E}(|st(n)|^2) \\
&= \frac{1}{Ne}. \sum_{n=0}^{Ne-1} \left(\mathbb{S}^2. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|h(n-kNe)|^2) \right) \\
&= \mathbb{S}^2. \frac{\sum_{n=0}^{Ne-1} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|h(n-kNe)|^2) \right)}{Ne}
\end{aligned}$$

On peut simplifier $\sum_{n=0}^{Ne-1} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|h(n-kNe)|^2) \right)$ en $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(|h(k)|^2)$ on a donc:

$$Pst = \mathbb{S}^2. \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(|h(k)|^2)}{Ne}$$

4 Ajout de bruit

Le bruit ajouté par le canal n'est pas filtré par le filtre de mise en forme des données il occupe donc toute la bande d'échantillonage complexe (la moitié en réel). On considère qu'il s'agit d'un bruit blanc additif. Le bruit Nk peut-être modélisé comme une variable aléatoire de variance 1 et d'espérance 0 additionnée au signal.

INSERER ICI JOLI GRAPH POURRI

La puissance du bruit $Pn = \mathbb{E}(|Nk|^2)$, sa densité $N0 = \frac{Pn}{Fe}$ ou Fe est la fréquence d'echantillonage, cependant cela n'est vrai qu'en complexe. En effet, la bande du signal échantilloné de manière complexe va de $\frac{-Fe}{2}$ à $\frac{Fe}{2}$, en réel cette bande va de 0 à $\frac{Fe}{2}$

4.1 Génération du bruit

Rappelons Variance de Nk:

$$\sigma^2(Nk) = \mathbb{E}(|Nk|^2) - |\mathbb{E}(Nk)|^2$$

A compléter plus tard sur la génération du bruit.

5 Energie par bit

Rappelons tout d'abord l'équation complète utilisée pour calculer le BER d'une modulation:

$$\frac{Eb.Db}{N0.BW}$$

Avec Eb qui est l'energie par bit en Joules, Db le débit binaire en $bits.s^{-1}$, $N0$ la densité de bruit en $watt.s^{-1}$ Définissons l'énergie par bit Eb comme étant l'énergie d'un symbole $Es = Pst * Ne$ (énergie totale d'un symbole), divisée par le nombre de bit d'un symbole Nb.